第 10 講　三角関数の合成と最大・最小

PART1　三角関数の最大・最小（合成）

1　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

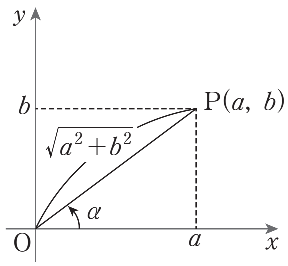
(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

Point Pickup

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ に加法定理を適用する。

(2)　$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の α が具体的な数値で表せないときは，α などの文字を用いて表し，ただし書きで α に関する説明を添える。

第10講　PART1　確認問題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

1　$y=6\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

最大値　$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，最小値　$\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

2　$y=\sqrt{33}\sin\theta+4\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

最大値　$\boxed{オ}$，最小値　$\boxed{カ}$

第 10 講　三角関数の合成と最大・最小

PART1　三角関数の最大・最小（合成）

1　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$

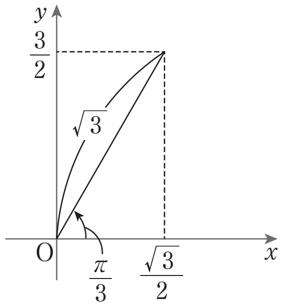
(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

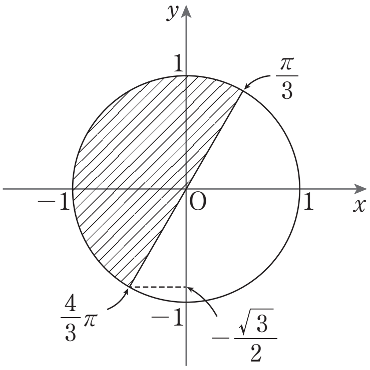


$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

よって　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ であるから

$$-\frac{3}{2}\leqq\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\sqrt{3}$$

したがって　最大値 $\sqrt{3}\left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$，最小値 $-\dfrac{3}{2}\,(\theta=\pi)$



(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

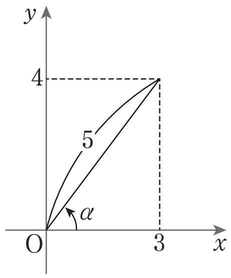
ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

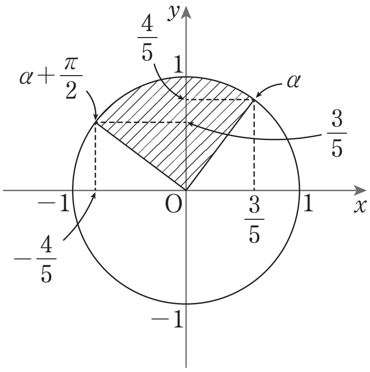
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{2}$

よって $\dfrac{3}{5}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ であるから

$$3\leqq 5\sin(\theta+\alpha)\leqq 5$$

したがって　最大値 5，最小値 3





第10講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウ：−，エ：3

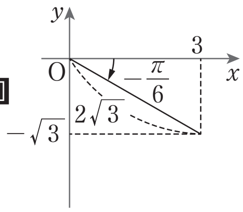
[解説]

$$y=6\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos\theta \quad \text{[A]}$$

$$=6\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{[B]}$$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

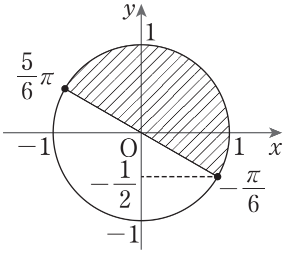
$$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

よって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

ゆえに　$-\sqrt{3}\leqq2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq2\sqrt{3}$

したがって　最大値 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ $\left(\theta=\frac{2}{3}\pi\right)$，

最小値 $\mathbf{-\sqrt{3}}$ $(\theta=0)$



[A]　加法定理

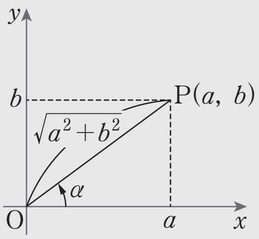
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

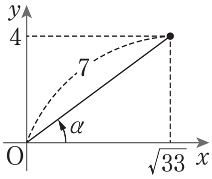
$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



2 [正解] オ：7，カ：4

[解説]

$$y=\sqrt{33}\sin\theta+4\cos\theta$$
$$=7\sin(\theta+\alpha)$$ [B]



ただし

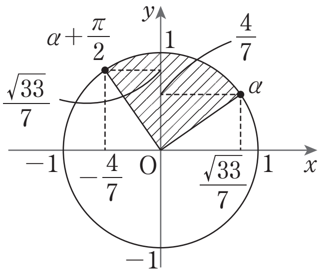
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{33}}{7},\quad \sin\alpha=\frac{4}{7}$$ [C]

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\dfrac{4}{7}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$

ゆえに　$4\leqq7\sin(\theta+\alpha)\leqq7$

したがって　**最大値 7，最小値 4**



[C]
三角関数の合成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ で，α が具体的な数値で表せないときは，ただし書きで α に関する説明を添える。